

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
КАФЕДРА ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

НОВОСЕЛОВ АЛЕКСЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ

**УПРУГИЕ ФОРМФАКТОРЫ НУКЛОНА В ОДНО-
И ДВУХ- ФОТОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

Дипломная работа бакалавра

научный руководитель
д.ф-м.н., профессор Лиходед А.К.

Протвино, 2007

1 Введение

Одной из фундаментальных задач физики элементарных частиц является выяснение структуры и поведения сильно взаимодействующих частиц — адронов, с точки зрения их составных частей — кварков и глюонов. Адроны включают в себя протоны и нейтроны, имеющие спин $1/2$, π -мезоны со спином 0 и другие частицы. Адронами, разумеется, являются и атомные ядра, поскольку они состоят из протонов и нейтронов.

Сильное взаимодействие между кварками и глюонами описывает квантовая хромодинамика. Пертурбативная квантовая хромодинамика строит свои предсказания в области очень больших переданных импульсов, соответствующих расстояниям меньше 10^{-14} см. Соответственно, описывать адроны, имеющие размеры порядка 10^{-13} см, она не в состоянии. Как следствие, в этой области существует множество феноменологических моделей. Уникальным инструментом для изучения внутренней структуры адронов, а значит и проверки этих моделей, является электромагнитное взаимодействие.

Упругие электромагнитные формфакторы характеризуют распределения заряда и тока внутри протона. Таким образом они представляют важнейший источник информации о его внутренней структуре.

С точки зрения взаимодействия фотона с протоном электрический $G_E(q^2)$ и магнитный $G_M(q^2)$ формфакторы являются функциями квадрата импульса $t = q^2 < 0$ переносимого фотоном. Поскольку нас интересуют упругие формфакторы, мы будем рассматривать процесс перехода между двумя состояниями свободно движущегося протона. В частности, фотон на диаграмме, изображенной на рисунке 1, должен быть виртуальным, так как свободная частица не может поглотить реальный фотон.

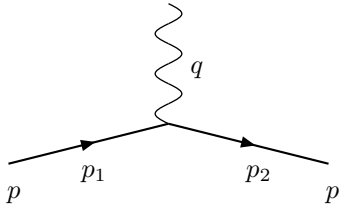


Рис. 1: Вершина взаимодействия фотона с протоном.

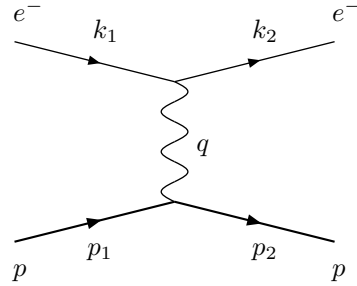


Рис. 2: Диаграмма низшего порядка, описывающая рассеяние электрона на протоне.

Наиболее общее Лоренц инвариантное выражение для вершины взаимодействия фотона с нуклоном записывается как

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{1}{4M} F_2(q^2) [\hat{q} \gamma^\mu] \equiv \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M} F_2(q^2), \quad (1)$$

где q — четырехимпульс фотона, M — масса протона, а F_1 и F_2 — формфакторы

Дирака и Паули, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\tau G_M - G_E}{1 + \tau}, \quad F_2 = \frac{G_M + G_E}{1 + \tau}, \\ \tau &= \frac{Q^2}{4M^2}, \quad Q^2 = -q^2 = -t > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

2 Метод Розенблюта

Как следует из сказанного во введении, самым простым способом измерения формфакторов протона является исследование упругой реакции рассеяния

$$e(k_1) + p(p_1) \rightarrow e(k_2) + p(p_2). \quad (3)$$

В низшем порядке теории возмущений эта реакция описывается диаграммой, показанной на рисунке 2.

Соответствующая амплитуда равна

$$\mathcal{M}_1 = \frac{4\pi\alpha}{q^2} \bar{u}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) \cdot \bar{u}(p_2) \Gamma^\mu u(p_1) \quad (4)$$

где k_1 и k_2 — начальный и конечный импульсы электрона, p_1 и p_2 — протона, а $q = k_1 - k_2 = p_2 - p_1$ — импульс передаваемый фотоном. Квадрирование этой амплитуды приводит к выражению

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}_1|^2 &= \frac{64\pi^2\alpha^2}{M^2 t^2} [2M^2(2M^4 - 2(s - t + u)M^2 + s^2 + u^2)] F_1^2 + \\ &+ 4M^2 t^2 F_1 F_2 + t(M^4 - (s - t + u)M^2 + su) F_2^2 \end{aligned} \quad (5)$$

где суммирование ведется по поляризациям начальных и конечных частиц, $s = (k_1 + p_1)^2$, $t = (k_1 - k_2)^2$, $u = (k_1 - p_2)^2$ — переменные Мандельштама (мы пренебрегли массой электрона по сравнению с массой протона M и "энергией реакции" \sqrt{s}).

Удобно в выражении (5) вернуться к формфакторам $G_E(q^2)$ и $G_M(q^2)$. В соответствии с (2) имеем:

$$G_E = F_1 - \tau F_2, \quad G_M = F_1 + F_2. \quad (6)$$

С использованием этих функций квадрат амплитуды переписывается в виде

$$\begin{aligned} \sum |\mathcal{M}_1|^2 &= \frac{128\pi^2\alpha^2}{(4M^2 - t)t^2} [8G_E^2 M^2 ((M^2 - s)^2 + st) - \\ &- G_M^2 t (2M^4 - 4(s + t)M^2 + 2s^2 + t^2 + 2st)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда дифференциальное сечение равно

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \epsilon(\tau + 1) \left(1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)} [G_E^2 \epsilon + G_M^2 \tau], \quad (8)$$

где θ — угол рассеяния электрона в лабораторной системе, $E = \frac{s - M^2}{2M}$ — его начальная энергия, а

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2}, \quad \epsilon = \left(1 + 2(1 + \tau) \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-1}. \quad (9)$$

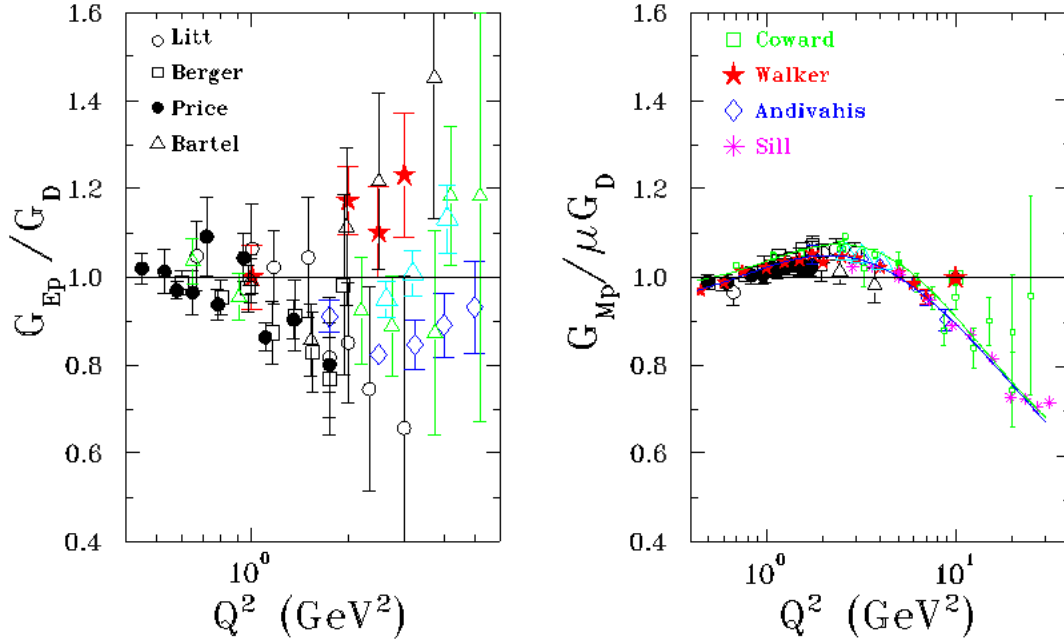


Рис. 3: Электрический и магнитный формфакторы нормированные на дипольное приближение

Соотношение (8) было впервые получено М.Н. Розенблютом [1]. Видно, что оно не содержит интерференционного члена, пропорционального произведению $G_E G_M$, а члены, пропорциональные G_E^2 и G_M^2 , дают разные угловые распределения. Таким образом, измеряя сечение при различных углах рассеяния электрона можно по отдельности определять G_E и G_M как функции Q^2 . Этот метод называется розенблютовским разделением.

Эксперименты позволяют определять G_E и G_M по отдельности вплоть до $Q^2 \sim 4 \text{ ГэВ}^2$. Магнитный формфактор хорошо измерен вплоть до $Q^2 \sim 10 \text{ ГэВ}^2$. В этом диапазоне результаты хорошо описываются дипольным приближением

$$G_E(Q^2) = \frac{G_M(Q^2)}{\mu} = G_D(Q^2) \equiv \left(1 + \frac{Q^2}{0.71 \text{ ГэВ}^2}\right)^{-2}, \quad (10)$$

где $\mu=2.79$ — магнитный момент протона. Как видно из формулы (8), вклад электрического формфактора в сечение уменьшается с увеличением Q^2 . Поэтому при больших Q^2 становится сложно измерять G_E методом Розенблюта. Измерения в диапазоне $Q^2 > 10 \text{ ГэВ}^2$ проводились в предположении $G_E(q^2) = G_M(q^2)/\mu$ вплоть до 31 ГэВ^2 [2]. При этом до $Q^2 \sim 10 \text{ ГэВ}^2$ дипольное приближения хорошо описывает экспериментальную зависимость (рис. 3).

3 Дипольное приближение

Качественно обосновать дипольное приближение можно на основе квантовой хромодинамики. Рассмотрим упругое рассеяние электрона на частице состоящей из n кварков. Пусть фотон провзаимодействовал с одним из них (рис. 4). Тогда чтобы частица осталась целой, этот кварк должен обменяться глюоном с каждым из других

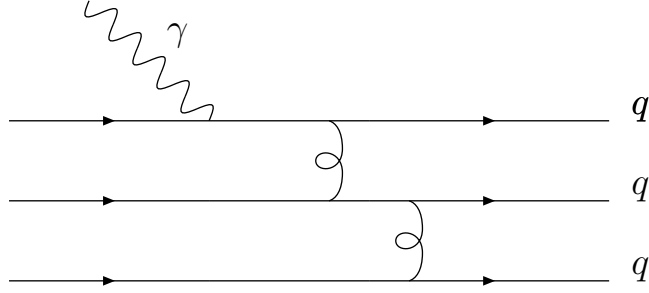


Рис. 4: Диаграмма упругого взаимодействия фотона с адроном

кварков для перераспределения полученного импульса Q . Таким образом получим $n - 1$ пропагатор глюонов. Квадрат импульса в каждом из них положим равным Q^2/n . Тогда получим выражение вида

$$G_n(Q^2) \sim \left(1 + \frac{Q^2}{n\Lambda}\right)^{-(n-1)}. \quad (11)$$

Соответственно для π -мезона и протона имеем (при $\Lambda = 0.471 \text{ ГэВ}^2$):

$$\begin{aligned} G_\pi(Q^2) &\sim \left(1 + \frac{Q^2}{0.471 \text{ ГэВ}^2}\right)^{-1}, \\ G_p(Q^2) &\sim \left(1 + \frac{Q^2}{0.71 \text{ ГэВ}^2}\right)^{-2}, \end{aligned} \quad (12)$$

что согласуется с экспериментальными наблюдениями.

4 Поляризационный метод

В последнее время благодаря доступности интенсивных пучков поляризованных электронов стало возможным использование так называемого поляризационного метода [3] для исследования формфакторов протона. В измерениях, производимых этим методом, интерференционный член дает заметный вклад в сечение. Таким образом увеличивается вклад малого электрического формфактора и становится доступно его более точное измерение.

Недавно в Джефферсонской лаборатории американского национального ускорительного центра (JNAF) поляризационным методом с высокой точностью измерили отношение $R = \mu G_E(Q^2)/G_M(Q^2)$ при высоких Q^2 [4, 5]. В этом эксперименте измерялись поперечная (P_t) и продольная (P_l) поляризации протонов отдачи при рассеянии продольно поляризованных электронов на водородной мишени. При этом отношение формфакторов протона может быть получено непосредственно из отношения P_t к P_l :

$$\frac{G_E}{G_M} = -\frac{P_t(E + E')}{P_l 2M} \tan \frac{\theta}{2} \quad (13)$$

где θ — угол рассеяния электрона, а E и E' — его начальная и конечная энергии. В результате было установлено что отношение R в исследованной области ведет себя как

$$R = \frac{\mu G_E}{G_M} = 1 - 0.13(Q^2[\text{ГэВ}^2] - 0.04), \quad (14)$$

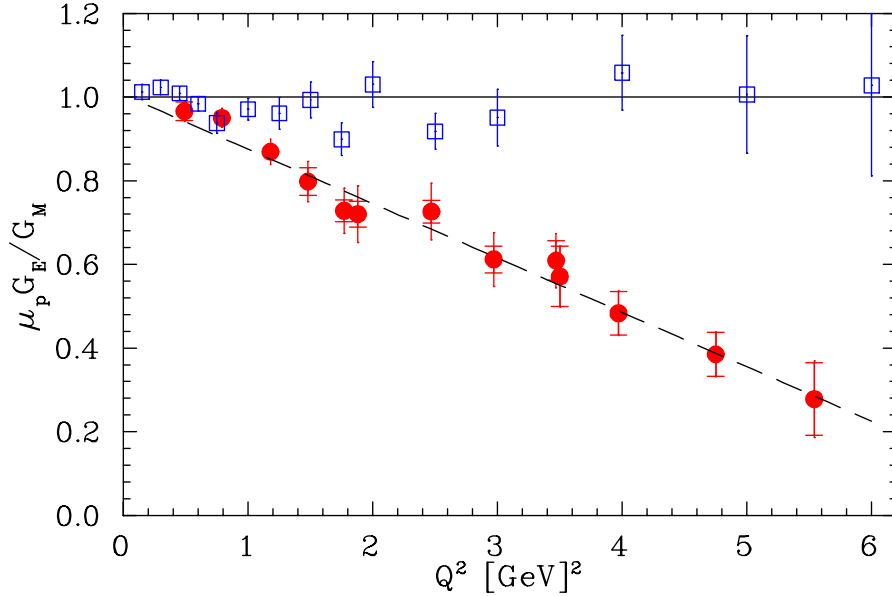


Рис. 5: Отношения формфакторов, полученные методом Розенблюта (квадраты) и поляризационным методом (кружки).

то есть линейно уменьшается с ростом Q^2 и при 5.5 ГэВ^2 уже составляет примерно 0.3.

Это оказалось очень неожиданным, так как ранее из многочисленных данных полученных методом Розенблюта, например [6], следовало что R является константой близкой к единице. После обнаружения такого расхождения проводились повторные аккуратные измерения R методом Розенблюта [7]. Однако они лишь подтвердили противоречие. При этом магнитный формфактор в пределах ошибок не отличался от полученного по розенблютовской технике, а электрический отличался в меньшую сторону в соответствии с (14). Численные данные приведены на рисунке 5.

5 Двухфотонный обмен (Two-photon exchange, TPE)

Ряд авторов [8–11] связывают эти расхождения с недостаточностью однофотонного приближения для точной интерпретации результатов неполяризованных экспериментов. Действительно, с увеличением Q^2 сечение упругой реакции, и особенно вклад электрического формфактора, стремительно уменьшается. Таким образом вклад двухфотонного обмена, который меньше зависит от Q^2 , может быть существенным. Так, в [10] было показано, что, несмотря на малый вклад TPE в полное сечение, его рассмотрение (используя упрощенную модель не учитывающую возбужденные промежуточные состояния протона) приводит к заметному изменению отношения формфакторов (см рис. 6).

Амплитуда однофотонного обмена пропорциональна заряду электрона e^2 , в то время как амплитуда TPE пропорциональна e^4 . Таким образом Борновское сечение пропорционально e^4 , а вклад интерференционного члена в сечение пропорционален e^6 . Он менее подавлен чем чистый двухфотонный обмен и является доминирующим эффектом от TPE.

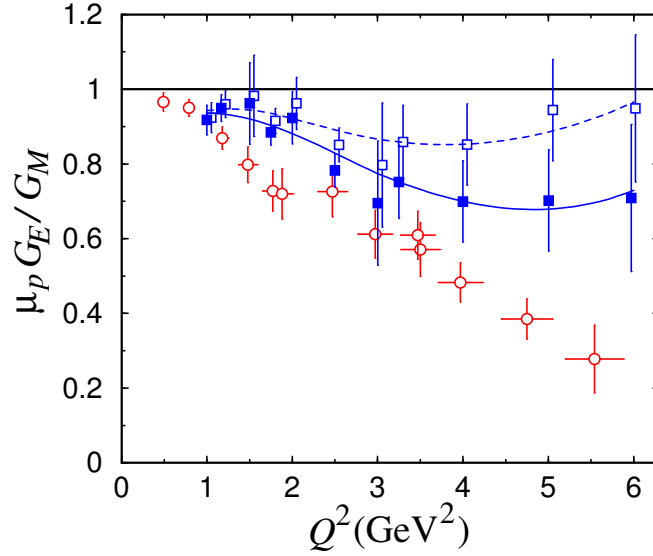


Рис. 6: Отношение формфакторов протона до (пустые квадраты) и после (закрашенные квадраты) корректировки связанной с двухфотонным обменом, а так же данные полученные поляризационным методом (пустые кружки).

Рассмотрим задачу нахождения поправок следующего, за борновским, порядка. Есть 2 типа фейнмановских диаграмм второго порядка (все они приведены на рис. 7). Во первых, это диаграммы включающие обмен одним фотоном (поляризация вакуума и перенормировки вершин). В диаграммах второго типа происходит обмен двумя фотонами (Вох и x-Вох диаграммы). Диаграммы первого типа не могут приводить к противоречию между данными полученными методом Розенблюта и поляризационным методом, так как описываются амплитудой похожей на (4), только с другой вершиной. Они должны учитываться для получения правильных значений сечений процессов.

Таким образом, ключевую роль в проблеме формфакторов имеет боксовая диаграмма.

Другие диаграммы второго порядка включают нечетное количество лептонных вершин и, как и борновская амплитуда, меняют знак при зарядовом сопряжении. Их произведение, соответственно, не зависит от знака заряда лептона.

Благодаря четному числу лептонных вершин амплитуда боксовой диаграммы не меняет знак при зарядовом сопряжении. Значит ее интерференция с борновской амплитудой нечетна относительно зарядового сопряжения. Это выливается в различие сечений электрон-протонного и позитрон-протонного рассеяния. Можно ввести зарядовую асимметрию

$$A = \frac{\sigma(e^-) - \sigma(e^+)}{\sigma(e^-) + \sigma(e^+)} = \frac{1 - R_\sigma}{1 + R_\sigma}, \quad (15)$$

где R_σ — отношение сечений рассеяния :

$$R_\sigma = \frac{\sigma(e^+)}{\sigma(e^-)}. \quad (16)$$

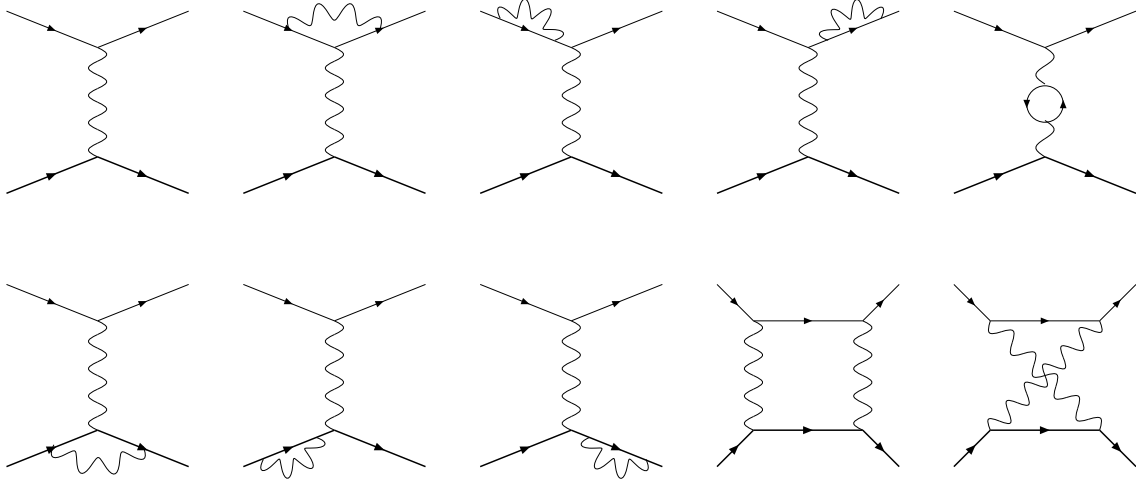


Рис. 7: Все возможные диаграммы первого и второго порядков

В 60х годах производились попытки измерения R_σ , но с неудовлетворительной точностью $\delta R_\sigma/R_\sigma \sim 5\%$ [12]. В 2004 году аналогичный эксперимент был предложен на ускорительном комплексе ВЭПП-3 Института Ядерной Физики имени Будкера в Новосибирске [13]. Предполагается, что энергия пучка 1.6 ГэВ позволяет измерить R_σ с точностью $\delta R_\sigma/R_\sigma \sim 0.3\%$ вплоть до $Q^2 = 1.6 \text{ ГэВ}^2$. Геометрия установки рассчитана на измерение R_σ в точках $Q^2 = 0.3 \text{ ГэВ}^2$ и $Q^2 = 1.5 \text{ ГэВ}^2$. Аналогичный эксперимент планируется в Джефферсонской лаборатории с энергией пучка 5.7 ГэВ. Тестовый запуск на энергии 3.3 ГэВ состоялся в конце прошлого года.

Итак, боксовая диаграмма и ответственна за зарядовую асимметрию, и является основным кандидатом на объяснение проблемы измерения формфакторов.

В этой работе будет найдена зарядовая асимметрия как функция квадрата переданного импульса t . Численные результаты будут получены для $s = 4.2 \text{ ГэВ}^2$ и 12.4 ГэВ^2 соответствующим энергиям пучка на ВЭПП-3 и CLAS.

6 Вычисление зарядовой асимметрии

Зарядовая асимметрия введена в формуле (15). Формулой (4) была введена амплитуда однофотонного обмена \mathcal{M}_1 . Обозначим \mathcal{M}_2 сумму амплитуд Вох и х-Вох диаграмм. Амплитуда рассматриваемого процесса равна

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2. \quad (17)$$

С учетом сказанного выше

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^+ &= -\mathcal{M}_1^-, \\ \mathcal{M}_2^+ &= \mathcal{M}_2^-, \end{aligned} \quad (18)$$

где знак "+" означает амплитуду позитрона, "-" — электрона. Перепишем формулу для зарядовой асимметрии (15) в виде

$$A = \frac{|\mathcal{M}^-|^2 - |\mathcal{M}^+|^2}{|\mathcal{M}^-|^2 + |\mathcal{M}^+|^2} \quad (19)$$

и найдем квадраты матричных элементов

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}^+|^2 &= (\mathcal{M}_1^{+*} + \mathcal{M}_2^{+*})(\mathcal{M}_1^+ + \mathcal{M}_2^+) \approx \\
&\approx |\mathcal{M}_1^+|^2 + \mathcal{M}_1^{+*}\mathcal{M}_2^+ + \mathcal{M}_1^+\mathcal{M}_2^{+*} + \dots \\
|\mathcal{M}^-|^2 &= (\mathcal{M}_1^{-*} + \mathcal{M}_2^{-*})(\mathcal{M}_1^- + \mathcal{M}_2^-) = \\
&= (-\mathcal{M}_1^{+*} + \mathcal{M}_2^{+*})(-\mathcal{M}_1^+ + \mathcal{M}_2^+) \approx \\
&\approx |\mathcal{M}_1^+|^2 - \mathcal{M}_1^{+*}\mathcal{M}_2^+ - \mathcal{M}_1^+\mathcal{M}_2^{+*} + \dots
\end{aligned} \tag{20}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{\mathcal{M}_1^{+*}\mathcal{M}_2^+ + \mathcal{M}_1^+\mathcal{M}_2^{+*}}{|\mathcal{M}_1^+|^2} = \\
&= \frac{\mathcal{M}_1^{-*}\mathcal{M}_2^- + \mathcal{M}_1^-\mathcal{M}_2^{-*}}{|\mathcal{M}_1^-|^2} = \frac{2\text{Re}(\mathcal{M}_1^-\mathcal{M}_2^{-*})}{|\mathcal{M}_1^-|^2}
\end{aligned} \tag{21}$$

Квадрат борновской амплитуды уже приведен в формуле (7). В следующем разделе найдем амплитуду боксовой диаграммы.

7 Вычисление амплитуды боксовой диаграммы

Нижняя часть боксовой диаграммы представляет собой дважды виртуальное комптоновское рассеяние. Его амплитуда имеет 2 полюса связанные с протоном в промежуточном состоянии. Вклад этих полюсов в амплитуду боксовой диаграммы называется упругой амплитудой. Аналогичные полюса обусловлены $\Delta(1232)$ и другими резонансами. В данной работе будет рассматриваться только упругая амплитуда. Однако метод, который будет изложен ниже, может быть применен с минимальными изменениями и к вкладам от резонансов.

В ранее изданных работах боксовая амплитуда вычислялась различными, более или менее приближенными способами.

В работах Мо и Цай [14] и Максимова и Тьёна [15] использовали приближение мягких фотонов. Оно заключается в том, что основной вклад в петлевой интеграл, возникающий при вычислении амплитуды, вносят области $q_1 \approx 0, q_2 \approx q$ и $q_1 \approx q, q_2 \approx 0$. Действительно, в этих точках подынтегральное выражение сильно пикует из-за инфракрасной расходимости. Однако таким путем можно получить только инфракрасно расходящуюся часть, которая полностью сокращается в окончательном ответе при учете излучения мягких фотонов. Мы же, наоборот, интересуемся конечной частью, основной вклад в которую, надо полагать, происходит из тех же областей.

В работе [16] было сделано предположение что наиболее важной областью выступает $q_1 \approx q_2 \approx q$. Возможно это разумно обосновывается, но, видимо, нуждается в уточнении.

В работах Блюндена и Тьёна интеграл вычисляется точно, но с использованием специальных аппроксимаций для формфакторов. Например монополярным приближением

$$F(t) = \frac{c}{d-t}, \tag{22}$$

в [17] и суммой монополей в [18]. Но этот способ вычисления имеет следующий недостаток. Так как формфакторы входящие в интеграл неизвестны из первых принципов, для них необходима некая модель соответствующая экспериментальным данным. Но для экспериментов по рассеянию доступна лишь область $t < 0$. Область $t > 4M^2$ может изучаться в реакции $e^-e^+ \rightarrow p\bar{p}$. Область $0 < t < 4M^2$ полностью недоступна для эксперимента. Петлевой интеграл же включает в себя формфакторы и из этой области.

Поэтому в настоящей работе будет использован метод вычисления петлевого интеграла, предложенный в работе [19]. Он имеет ряд преимуществ. Во-первых, интегрирование происходит по всему пространству, а не по избранным областям. Во-вторых, не делается никаких предположений о виде функций F_1 и F_2 . Интегрирование по двум из четырех независимых переменных производится аналитически и результат может быть представлен в наиболее общем виде

$$\mathcal{M}_{\substack{\text{box} \\ \text{x-box}}} = \sum_{i,j=1}^2 \int_{t_1, t_2 \leq 0} \kappa_{ij}(t_1, t_2) F_i(t_1) F_j(t_2) dt_1 dt_2, \quad (23)$$

При выводе (23) производится виковский поворот и квадраты четырехимпульсов фотонов становятся знакоопределенными. В результате интегрирование производится только по отрицательным t_1 и t_2 и исчезает проблема с неопределенностью формфакторов при $t > 0$. Как видно из структуры интеграла (23), возможно находить боксовую амплитуду для любых моделей формфакторов. В настоящей работе будет произведено сравнение дипольного приближения и данных поляризационных измерений.

Вох и x-Вох диаграммы и обозначения импульсов частиц приведены на рисунке 8. Массы протона и электрона — M и m соответственно. Обозначим

$$P = (p_1 + p_2)/2, \quad K = (k_1 + k_2)/2, \quad q = p_2 - p_1, \quad \nu = 4PK. \quad (24)$$

Также

$$q_1 = p - p_1, \quad q_2 = p_2 - p, \quad k = K \pm (P - p), \quad (25)$$

где верхний знак для Вох, нижний для x-Вох диаграммы.

Амплитуда соответствующая обеим диаграммам

$$i\mathcal{M}_{\substack{\text{box} \\ \text{x-box}}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int \frac{N(p)d^4p}{(q_1^2 - \lambda^2)(q_2^2 - \lambda^2)(k^2 - m^2)(p^2 - M^2)}, \quad (26)$$

где для Вох диаграммы

$$N(p) = \bar{u}(k_2)\gamma_\mu(\hat{k} + m)\gamma_\nu u(k_1) \cdot \bar{U}(p_2)\Gamma_\mu(q_2)(\hat{p} + M)\Gamma_\nu(q_1)U(p_1), \quad (27)$$

Γ_μ определено в (1), $\hat{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu$. Для x-Вох диаграммы следует поменять местами γ_μ и γ_ν в (27). "Масса фотона" λ введена для избежания инфракрасной расходимости. Обе диаграммы расходятся как $\ln m$ при $m \rightarrow 0$, но их сумма - нет. Поэтому массой электрона, в принципе, можно пренебречь. Однако для общности она будет оставлена.

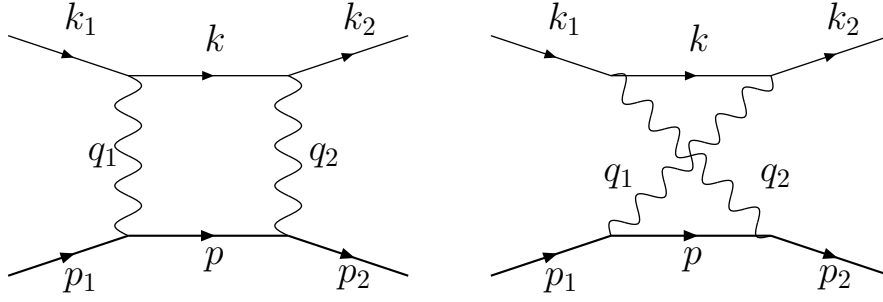


Рис. 8: Вох и x-Вох диаграммы

Есть 4 независимые скалярные функции от p . В качестве независимых переменных выберем

$$\begin{aligned}
t_1 &\equiv q_1^2 = p^2 + M^2 - 2p_1p, \\
t_2 &\equiv q_2^2 = p^2 + M^2 - 2p_2p, \\
p^2 - M^2, \\
k^2 - m^2 &= \frac{t_1+t_2-t}{2} \pm 2KP \mp 2Kp,
\end{aligned} \tag{28}$$

где, как обычно, верхний знак для Вох, нижний для x-Вох диаграммы. Так как $N(p)$ полиномиален по p , то он может быть переписан как полиномиальная функция переменных (28).

Покажем теперь, что интеграл (26) может быть сведен к четырем интегралам

$$I_n = \int \frac{A(t_1, t_2) \bar{F}(t_1) \bar{F}(t_2)}{D_n} d^4p, \tag{29}$$

где A — полиномиал, $\bar{F}(t) = F(t)/(t - \lambda^2)$, и

$$\begin{aligned}
D_1 &= 1 \\
D_2 &= k^2 - m^2 \\
D_3 &= p^2 - M^2 \\
D_4 &= (k^2 - m^2)(p^2 - M^2).
\end{aligned} \tag{30}$$

Максимальная степень $k^2 - m^2$ и $p^2 - M^2$ в $N(p)$ больше единицы, так что при разбиении (26) появляются интегралы отличные от I_n .

Интегралы вида

$$\int A(t_1, t_2) \frac{(p^2 - M^2)^2}{k^2 - m^2} d^4p \text{ и } \int A(t_1, t_2) \frac{(k^2 - m^2)^2}{p^2 - M^2} d^4p \tag{31}$$

входят в амплитуду с коэффициентами одинаковой величины, но разных знаков, для Вох и x-Вох диаграмм. Соответственно после суммирования они исчезают.

Теперь рассмотрим, например, интеграл

$$\begin{aligned}
&\int A(t_1, t_2) \frac{p^2 - M^2}{k^2 - m^2} d^4p = \int A(t_1, t_2) \frac{(P+K-k)^2 - M^2}{k^2 - m^2} d^4p = \\
&= \frac{\nu+4m^2-t}{2} \int A(t_1, t_2) \frac{1}{k^2 - m^2} d^4p + \int A(t_1, t_2) d^4p - \\
&\quad - 2(P+K)^\mu \int A(t_1, t_2) \frac{k_\mu}{k^2 - m^2} d^4p.
\end{aligned} \tag{32}$$

Первый и второй интеграл в правой стороне уравнения уже имеют требуемый вид. Так как $t_{1,2} = (K \pm q/2 - k)^2$, то последний интеграл зависит только от q_μ и K_μ :

$$\int A(t_1, t_2) \frac{k_\mu}{k^2 - m^2} d^4p = \alpha q_\mu + \beta K_\mu, \quad (33)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2t} \int A(t_1, t_2) \frac{t_2 - t_1}{k^2 - m^2} d^4p, \quad \beta = \frac{1}{4m^2 - t} \int A(t_1, t_2) \left(\frac{4m^2 - t_1 - t_2}{k^2 - m^2} + 2 \right) d^4p, \quad (34)$$

так что окончательно

$$\int A(t_1, t_2) \frac{p^2 - M^2}{k^2 - m^2} d^4p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\nu}{4m^2 - t} \right) \int A(t_1, t_2) \frac{t_1 + t_2 - t}{k^2 - m^2} d^4p - \frac{\nu}{4m^2 - t} \int A(t_1, t_2) d^4p. \quad (35)$$

Аналогично

$$\int A(t_1, t_2) \frac{k^2 - m^2}{p^2 - M^2} d^4p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\nu}{4M^2 - t} \right) \int A(t_1, t_2) \frac{t_1 + t_2 - t}{p^2 - M^2} d^4p - \frac{\nu}{4M^2 - t} \int A(t_1, t_2) d^4p \quad (36)$$

и

$$\int A(t_1, t_2) (k^2 - m^2) d^4p = \int A(t_1, t_2) (p^2 - M^2) d^4p = \int A(t_1, t_2) \frac{t_1 + t_2 - t}{2} d^4p. \quad (37)$$

Для х-Вох диаграммы интегралы I_1, I_2, I_3 , такие же как для Вох диаграммы, а I_4 — нет из-за другого соотношения между p и k . Обозначим соответствующий интеграл I_{4x} .

Интегрирование по последним двум их независимых переменных (28) можно провести аналитически. После интегрирования по ним получаем

$$I_n = \int \mathcal{K}_n(t_1, t_2) A(t_1, t_2) \bar{F}(t_1) \bar{F}(t_2) dt_1 dt_2 \quad (38)$$

где \mathcal{K}_n — известные функции. Выражения для всех \mathcal{K}_n приведены в приложении.

8 Получение численных результатов

Все вычисления проводились в среде Mathematica 6.0 с использованием пакета FeynCalc. После перемножения амплитуд одно- и двух- фотонного обмена (4), (26) и последовательности упрощений результат представляется в виде суммы интегралов вида (29). После интегрирования по $p^2 - M^2$ и $k^2 - m^2$ получим интерференцию в виде

$$\tilde{\mathcal{I}} = \int \sum_{1,2,3,4,4x} \mathcal{K}_n(t_1, t_2) A_n(t_1, t_2) \bar{F}(t_1) \bar{F}(t_2) dt_1 dt_2 \quad (39)$$

Как известно, боксовая диаграмма инфракрасно расходится из-за зануления знаменателя пропагатора любого из фотонов. Так же известно что одновременный учет эмиссии мягких фотонов уничтожает эту расходимость. Поэтому в пропагатор обоих фотонов в боксовой диаграмме вводилась небольшая "масса фотона" λ . Тогда

$$\tilde{\mathcal{I}} = a \ln \lambda + b + o(\lambda). \quad (40)$$

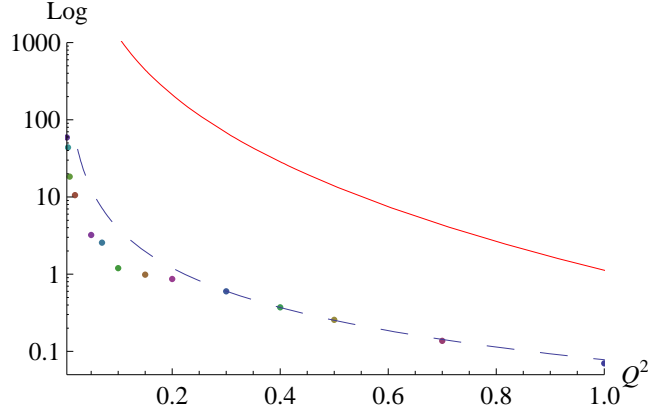


Рис. 9: Точки соответствуют интерференционному члену, пунктирная линия - их фитиру функцией $1/x^{1.5}$, сплошная линия - квадрату однофотонного

Вычисляя \mathcal{I} для нескольких малых, но ненулевых λ и фитируя получившиеся точки функцией

$$a \ln \lambda + b + c\lambda. \quad (41)$$

можно извлечь не расходящуюся часть интерференции

$$\mathcal{I} = b. \quad (42)$$

Во-первых, интересно было выяснить, действительно ли при больших переданных импульсах интерференция может преобладать над чистым однофотонным обменом.

На рисунках 9 приведен график зависимости интерференции и квадрата амплитуды однофотонного обмена от квадрата переданного импульса t . Указанная зависимость получена при $s = 12.4 \text{ ГэВ}^2$ и формфакторах соответствующих поляризационным измерениям. Интерференционный член хорошо фитируется функцией $1/x^{1.5}$. Заметим что квадрат борновской амплитуды без учета формфакторов падает как $1/x^4$. При учете формфакторов он должен падать еще быстрее. Конечно было бы более интересно поводить сравнение при бóльших t , но там возникают проблемы с проведением численного интегрирования и достоверные результаты пока не получены.

Вторым интересным вопросом является, насколько асимметрия чувствительна к формфакторам.

На рисунках 10 и 11 показаны графики зависимости асимметрии от квадрата переданного импульса при разных энергиях пучка и разных моделях формфакторов. Как можно заметить, бóльшая чувствительность к форме формфакторов проявляется при бóльшой энергии пучка. Так при $s = 12.4 \text{ ГэВ}^2$ эффект достигает 15%. Это соответствует энергии в CLAS. Однако эффект должен проявляться и на энергиях ВЭПП-3.

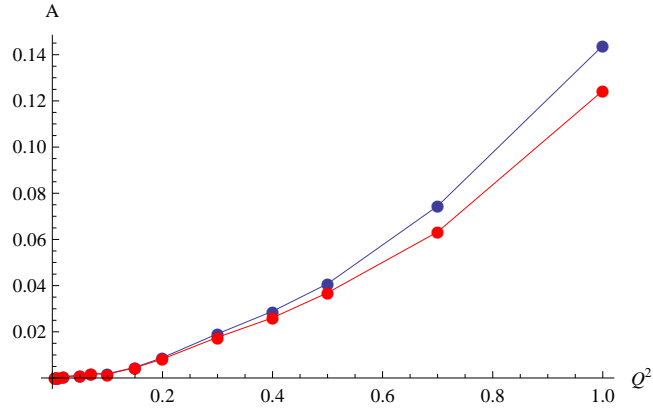


Рис. 10: Зарядовая асимметрия для различных формфакторов: синяя линия - дипольное приближение, красная - дипольное приближение, скорректированное с учетом данных поляризационных экспериментов. $s = 12.4 \text{ ГэВ}^2$

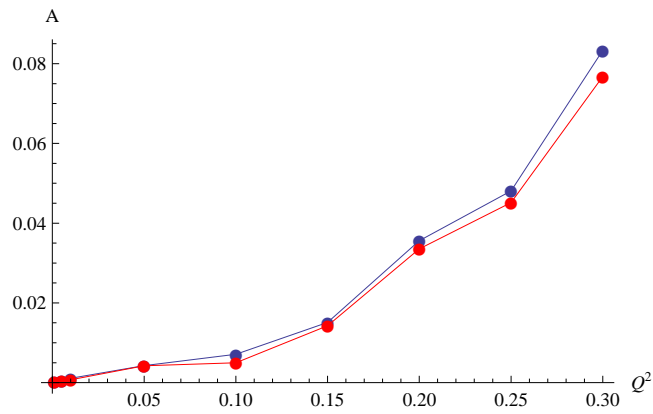


Рис. 11: Зарядовая асимметрия для различных формфакторов: синяя линия - дипольное приближение, красная - дипольное приближение, скорректированное с учетом данных поляризационных экспериментов. $s = 4.2 \text{ ГэВ}^2$

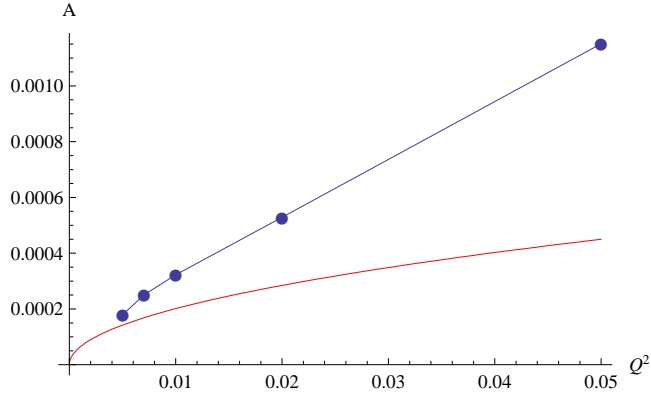


Рис. 12: Результаты полученные: синяя линия - в этой работе, красная - в работе [20]. $s = 12.4 \text{ ГэВ}^2$

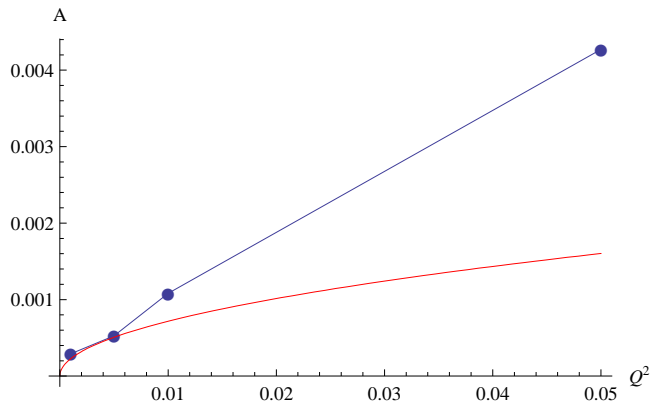


Рис. 13: Результаты полученные: синяя линия - в этой работе, красная - в работе [20]. $s = 4.2 \text{ ГэВ}^2$

При малых t задача вычисления асимметрии упрощается. Во-первых, можно считать частицы скалярными, так как при малых передачах t -канальный фотон не чувствует спина частицы. Во-вторых, можно не учитывать формфакторы, которые при малых t постоянны.

Задача рассеяния электрона на протоне на малые углы во всех порядках теории возмущений решена Г.П. Пронько в его работе [20]. Для проверки согласованности результатов разных методов, было проведено сравнение асимметрии при малых t . Как видно из рисунков 12 и 13 результаты хорошо согласуются. Полного согласия между ними ожидать не нужно, так как в работе Пронько учитываются диаграммы всех порядков, что, при малых t может приводить к заметному отличию.

9 Заключение

В данной работе проведено вычисление зарядовой асимметрии для разных моделей формфакторов и энергиях пучка соответствующих параметрам реальных установок. Проведена оценка асимметрии в зависимости от переданного импульса. Также оценена чувствительность этой величины к форме формфакторов. Установлено что как асимметрия, так и тонкие эффекты связанные с неопределенностью формфакторов, могут наблюдаться в экспериментах на ВЭПП-3 и CLAS. Также проверена согласованность результата с другими вычислениями в области малых t . Противоречия с ними не обнаружено.

В заключение, хочется выразить благодарности научному руководителю А.К. Лиходеду за чуткое руководство, А.В. Лучинскому за помощь и консультации по многим вопросам, и Г.П. Пронько за ответы на вопросы по его работе.

10 Приложение

Приведем явный вид интегралов \mathcal{K}_n :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(t_1, t_2) &= \frac{\pi \xi_*}{\sqrt{-t}} \theta(x_\infty), \\
\mathcal{K}_2(t_1, t_2) &= \frac{\pi}{2\sqrt{-t}(4m^2 - t)} \left\{ \theta(x_\infty) \ln \left(\xi + \frac{t_1 + t_2 - t}{2\sqrt{4m^2 - t}} \right) \Big|_{-\xi_*}^{\xi_*} - \right. \\
&\quad \left. - 2\pi i \theta(x_m) \theta(-x_\infty) \theta(t_1 + t_2 - t) \right\}, \\
\mathcal{K}_3(t_1, t_2) &= \frac{\pi}{2\sqrt{-t}(4M^2 - t)} \left\{ \theta(x_\infty) \ln \left(\xi + \frac{t_1 + t_2 - t}{2\sqrt{4M^2 - t}} \right) \Big|_{-\xi_*}^{\xi_*} - \right. \\
&\quad \left. - 2\pi i \theta(x_M) \theta(-x_\infty) \theta(t_1 + t_2 - t) \right\}, \\
\mathcal{K}_4(t_1, t_2) &= \frac{\pi}{2\sqrt{R_+}} \left\{ \theta(x_\infty) \ln \left[\frac{\xi}{\sqrt{-t}} \sqrt{R_+} - \nu x_\infty + \left(\frac{t_1 + t_2 - t}{2} \right)^2 \right] \Big|_{-\xi_*}^{\xi_*} + \right. \\
&\quad \left. + 2\pi i \theta(x_\infty) + 2\pi i \theta(-x_\infty) \theta(t_1 + t_2 - t) [\theta(x_m) + \theta(x_M)] \right\}, \\
\mathcal{K}_{4x}(t_1, t_2) &= \frac{-\pi}{2\sqrt{R_-}} \left\{ \theta(x_\infty) \ln \left[\frac{\xi}{\sqrt{-t}} \sqrt{R_-} - \nu x_\infty - \left(\frac{t_1 + t_2 - t}{2} \right)^2 \right] \Big|_{-\xi_*}^{\xi_*} + \right. \\
&\quad \left. + 2\pi i \theta(t_1 + t_2 - t) [\theta(x_m) \theta(-x_M) + 2\theta(R_-) \theta(x_M) \theta(\nu + t - 4M^2)] \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\xi_* &= i\sqrt{x_\infty}, \\
x_\infty &= \frac{1}{t} \left(\frac{t_1 + t_2 - t}{2} \right)^2 - \frac{1}{t} t_1 t_2, \\
x_M &= \frac{1}{t} \left(\frac{t_1 + t_2 - t}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{4M^2} \right) t_1 t_2, \\
x_m &= \frac{1}{t} \left(\frac{t_1 + t_2 - t}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{4m^2} \right) t_1 t_2, \\
R_\pm &= \left(\frac{t_1 + t_2 - t}{2} \right)^2 ((\nu \mp t)^2 - 16m^2 M^2) - t_1 t_2 (\nu^2 - (4m^2 - t)(4M^2 - t))
\end{aligned}$$

и $\sqrt{R_\pm} = \sigma |R_\pm|^{1/2}$, где $\sigma = -\text{sign}(t_1 + t_2 - t)$ если $R_\pm > 0$ и $\sigma = -i$ если $R_\pm < 0$.

Список литературы

- [1] M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. **79** (1950) 615.
- [2] A. F. Sill *et al.*, Phys. Rev. D **48**, 29 (1993).
- [3] A. Akhiezer and M. P. Rekalov, Dokl. Akad. Nauk USSR, **180**, 1081 (1968); Sov. J. Part. Nucl. **4**, 277 (1974).

- [4] M. K. Jones *et al.* [Jefferson Lab Hall A Collaboration], Phys. Rev. Lett. **84**, 1398 (2000) and arXiv:nucl-ex/9910005
- [5] O. Gayou *et al.* [Jefferson Lab Hall A Collaboration], Phys. Rev. Lett. **88**, 092301 (2002) and arXiv:nucl-ex/0111010
- [6] J. Arrington, Phys. Rev. C **68**, 034325 (2003) and arXiv:nucl-ex/0305009.
- [7] I. A. Qattan *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 142301 (2005) and arXiv:nucl-ex/0410010
- [8] M. P. Rekalo and E. Tomasi-Gustafsson, arXiv:nucl-th/0312030.
- [9] J. Arrington, Phys. Rev. C **69**, (2004) 032201 and arXiv:nucl-ex/0311019.
- [10] P. G. Blunden, W. Melnitchouk and J. A. Tjon, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 142304 and arXiv:nucl-th/0306076.
- [11] Y. C. Chen, A. Afanasev, S. J. Brodsky, C. E. Carlson, and M. Vanderhaeghen, arXiv:hep-ph/0403058.
- [12] J. Mar *et al.*, Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 482.
- [13] J. Arrington *et al.*, “Two-photon exchange and elastic scattering of electrons/positrons on the proton. (Proposal for an experiment at VEPP-3),” arXiv:nucl-ex/0408020.
- [14] Y.S. Tsai, Phys. Rev. **122**, 1898 (1961).
- [15] L.C. Maximon, J.A. Tjon, Phys. Rev. C **62**, 054320 (2000).
- [16] Yu.M. Bystritskiy, E.A. Kuraev, E. Tomasi-Gustafsson, hep-ph/0603132.
- [17] P.G. Blunden, W. Melnitchouk, J.A. Tjon, Phys. Rev. Lett. **91**, 142304 (2003).
- [18] P.G. Blunden, W. Melnitchouk, J.A. Tjon, Phys. Rev. C **72**, 034612 (2005).
- [19] D. Borisyuk and A. Kobushkin, Phys. Rev. C **74**, 065203 (2006) and arXiv:nucl-th/0606030.
- [20] В.В. Бажанов, Г.П. Пронько, Л.Д. Соловьев, Ю.Я.Юшин, Теоретическая и математическая физика **33** (1977).